Carlo Felice Manara

RICERCA MATEMATICA E DIDATTICA

1 - Problemi della didattica e dell'apprendimento

Ogni operatore della scuola può constatare che i problemi della didattica della matematica attirano da tempo l'attenzione di molti: a questi problemi sono dedicati frequenti convegni e riviste specializzate; di essi si occupano appositi organi permanenti di prestigiose associazioni scientifiche; grande è quindi il mio timore di esporre delle cose risapute e ritrite; e pertanto chiedo scusa ai miei ascoltatori se le cose che dirò saranno banali. Tuttavia ritengo che non sia vano il ripetere certe osservazioni, se non altro perché, nel mio caso, sono il risultato di un lavoro didattico lungo e spesso pesante.

Anzitutto vorrei osservare che l'insegnamento della matematica presenta alcune difficoltà comuni ad ogni altra opera didattica, ed altre difficoltà specifiche, le quali discendono dalla natura della dottrina in parola. Credo di poter dire che le difficoltà generiche sono, a mio parere, dovute al fatto che l'opera dell'insegnante ha un carattere particolare, tale che da parte della saggezza antica e medievale essa era qualificata come "ars". Questo termine latino non può essere tradotto con il vocabolo italiano "arte", che ha ormai assunto per noi un significato del tutto diverso. Invece il vocabolo latino voleva significare una azione dell'uomo sull'essere umano; azione che deve essere fondata sulla scienza, ma che è anche unica ed in certo senso irripetibile, e nella quale l'operatore deve tener conto di moltissimi elementi, che, personalmente, non ritengo ancora sufficientemente chiariti in ogni loro aspetto. Ricordo che la saggezza antica parlava analogamente di " ars medica" e di "ars politica" per indicare, anche in questi casi, certe azioni dell'essere umano sull'essere umano che, in questo ordine di idee, presentano problemi analoghi all'insegnamento. In particolare poi vorrei osservare che l'apprendimento mi pare un fenomeno molto misterioso; a tal punto che molte analisi psicologiche e molte procedure didattiche destano spesso la mia diffidenza, e la mia perplessità, spesso addirittura il mio allarme. E ciò dico in base ad osservazioni personali su me stesso e su allievi; osservazioni fatte in lunghi anni di fatiche didattiche e di tentativi vari, spesso mal riusciti.

E queste osservazioni fondano la mia diffidenza [di cui ho detto] su certe teorie psicologiche le quali mi appaiono spesso inadeguate a dominare un fenomeno umano che - ripeto - mi appare spesso ricco di lati misteriosi. E ciò sia detto con buona pace di certi psicologi che talvolta danno l'impressione di credere di saper tutto sulla mente umana, quasi come un esperto di computer sa tutto su quelle macchine. Questa presunzione potrebbe essere bonariamente considerata come una innocua fissazione se non si trasferisse spesso nella pratica di molti che pretendono di essere consulenti e di erigersi a giudici di un'opera quanto mai difficile come quella dell'insegnamento. La presunzione si manifesta nella pretesa di giudicare delle attitudini dei soggetti e delle loro capacità razionali. Infatti dobbiamo constatare con allarme la diffusione della moda di quella analisi superficiali e sbrigative che vengono chiamate con il nome straniero di "tests". Purtroppo la nostra scuola ha rinunciato da tempo alla formazione culturale degli allievi; la folla di questi e la degradazione dell'impegno ha quindi diffuso la pratica di utilizzare questi strumenti che io considero un clamoroso esempio di degenerazione della funzione scolastica. Non intendo insistere su questo argomento, su cui ho già scritto in altra sede; mi limito ad osservare che troppo spesso le domande ["quiz" le chiamano coloro che vogliono parlare moderno, e dimenticano che la radice della parola è ovviamente la "quaestio" del latino] che riguardano la matematica sono clamorosamente errate o imprecise, e che comunque esse rispecchiano una immagine della dottrina quasi completamente distorta.

Vorrei anche osservare che uno degli argomenti su cui si fondava la contestazione sessantottina era la lotta a ciò che era chiamato "nozionismo"; di questo peccato era accusata la nostra scuola del tempo; la quale, secondo i contestatori, insisteva nel dare delle informazioni poco coordinate tra loro, e non dava la formazione a quella che essi pretendevano chiamare la "cultura". Oggi molti dei contestatori del tempo si sono insediati nei posti chiave di quel "sistema" che essi dicevano di voler distruggere; e, per quanto riguarda la cultura, dobbiamo assistere quotidianamente in televisione, di Stato e non di Stato, a certi "giochi" di domande e risposte, dedicati non soltanto agli alunni ma anche ad ascoltatori maturi; si potrebbe dire che in questi giochi trionfa il nozionismo più becero e beota, perché vengono premiati coloro che hanno infarcito la propria memoria delle nozioni più vacue ed inutili che si possano immaginare. Non si direbbe quindi che i contestatori del tempo andato abbiano saputo mantenere la parola e realizzare i programmi tanto sbandierati. Prima di lasciare questo argomento vorrei ricordare un pericolo, che mi appare abbastanza grave, anche se da molti non è percepito; pericolo consistente nel fatto che tali prove chiaramente vorrebbero mirare a mettere in evidenza un tipo di intelligenza che la nostra civiltà pare apprezzare particolarmente, e che si dovrebbe manifestare con la facilità di accettare, valutare e manovrare l'immagine fisico-matematica del mondo. Si dimentica che non è affatto dimostrato che tale tipo di intelligenza realizzi il massimo livello delle menti umane; e che comunque esistono vari altri tipi di intelligenza, come ha bene messo in evidenza H. Gardner [1]. Inoltre un atteggiamento siffatto potrebbe anche spingere qualcuno a pensare che il linguaggio matematico è talmente importate che è giustificato imporre il suo apprendimento, anche a costo di ridurre l'insegnamento ad un addestramento che avrebbe molti aspetti comuni con l'addestramento degli animali da circo.

2 - La specificità della matematica

Ho detto poco fa che l'opera dell'insegnante presenta certe difficoltà generiche, dovute al fatto che l'insegnare non è semplicemente l'applicazione di certe tecniche, fondate sulla conoscenza di una determinata dottrina, ma ha una sua specificità dovuta al fatto che esso è anche una azione, unica ed irripetibile, di un essere umano su un altro essere umano. Altre difficoltà per l'opera dell'insegnante nascono dalla qualità specifica della dottrina che si insegna; pertanto tale opera dipende dalla concezione che l'operatore si fa della dottrina insegnata; ed infine dalla concezione che egli ha delle persone sulle quali opera. Ed in quest'ultimo ordine di idee, vorrei citare qui ciò che scrive H. Freudenthal [2] asserendo che "il tipo di matematica che si insegna dipende dalla concezione che si ha dell'uomo; se si concepisce il soggetto come essere umano libero si insegnerà una matematica da uomini liberi; altrimenti si insegnerà una matematica da schiavi."

Avremo occasione di ritornare in seguito su queste idee. Qui incomincio col richiamare il pensiero di Freudenthal il quale pone all'inizio dei suoi discorsi l'osservazione che "la matematica è diversa". E pertanto il suo insegnamento deve essere eseguito con mentalità e con procedure diverse da quelle che servono per insegnare altre dottrine. Questa opinione del matematico olandese è da me condivisa, perché è da lui fondata su argomentazioni che a me appaiono valide; e perché la stessa opinione è convalidata dalle osservazioni che ho potuto fare su me stesso e sui molti studenti con i quali sono entrato in contatto in decenni di lavoro didattico. Meditando e riflettendo su questo esperienze [esteriori ed interiori] mi sono convinto della validità delle osservazioni che Freudenthal espone. Tra queste osservazioni alcune mi appaiono particolarmente acute e profonde. La prima riguarda la discontinuità del fenomeno di apprendimento, il quale ci si presenta come se avvenisse per salti, senza seguire quello che per noi dovrebbe essere uno sviluppo continuo, che segue un filo logico per noi tranquillizzante perché consono alla immagine che ci formiamo dei processi mentali, nostri ed altrui.

In particolare questo "apprendere per salti" si realizza facendo sì che le procedure e gli algoritmi che ad un certo livello di apprendimento sono utilizzati come strumenti pratici, al cui uso si è stati addestrati, ad un livello superiore siano a loro volta oggetto di riflessione e di analisi critica. Ma un apprendimento che sia valido può avvenire soltanto per un personale sforzo di appropriazione e rielaborazione dei concetti; cioè con una evoluzione interiore che richiede uno sforzo personale inevitabile. Cosa che, del resto, si potrebbe dire nota da sempre; come è dimostrato dal celebre aneddoto, riguardante la risposta che, secondo la leggenda, Euclide diede ad un potente del tempo; risposta secondo la quale non esiste una "via regia" alla matematica. Invero - ripetiamo - la costruzione interiore di un sistema concettuale coerente resta pur sempre una impresa in cui il singolo può essere stimolato, aiutato, ma non sostituito: deve essere pur sempre risultato di un impegno e di una fatica dai quali nessuno può essere esonerato.

Una seconda idea di Freudenthal - che io condivido- presenta l'apprendimento della matematica come una "reinvenzione guidata": reinvenzione che deve essere il risultato di una fatica personale ineliminabile. Ma reinvenzione guidata da un insegnante che conosce a fondo la materia, così da poter guidare le attività dell'allievo nel modo che risulti a lui più utile. Come si vede, la problematica della didattica della matematica [a tutti i livelli] è vasta e complessa; essa quindi non si riduce a quelle "cretinate" di cui parlava un libro classico della contestazione [3]; libro che ho visto riesumato recentemente, forse perché riproduce la mentalità dei nostri governanti attuali, o forse anche soltanto perché favorisce i loro meschini progetti di devastazione culturale.

3 - La didattica e la ricerca sui fondamenti

Penso che qualche considerazione sulla storia recente della matematica sia utile per rendere più organiche e comprensibili le osservazioni che farò nel seguito. E' noto che nel secolo XIX la nostra scienza ha vissuto un grande travaglio critico, che l'ha condotta all'assetto che possedeva all'inizio del nostro secolo (il XX) e che è sopravvissuto almeno fino alla metà del secolo, ed alla rivoluzione informatica. A mio parere, uno dei fenomeni più importanti, che avviarono l'inizio della crisi fu l'invenzione delle geometrie non euclidee, e la dimostrazione della loro non contraddittorietà, cioè della loro validità logica. La ricerca di una sistemazione coerente della matematica che tenesse conto della nuova situazione favorì anche gli sviluppi della logica formale, e del filone di studi che ad essa si ispira.

E' noto che la nostra matematica è debitrice di molti fondamentali concetti e metodi a personaggi importantissimi che hanno lavorato nel periodo a cavallo tra i due secoli. Ovviamente non mi è possibile ricordare i nomi di tutti questi grandi del pensiero matematico. Mi devo quindi limitare a ricordare, di sfuggita ed in modo sommario e superficiale, i nomi di alcuni, il cui pensiero ha avuto [a mio parere] influenza anche sulla didattica della matematica nei decenni successivi a loro. In questo ordine di idee mi limiterò a ricordare i nomi di Giuseppe Peano [1858-1932] e di David Hilbert [1869-1939], per l'importanza dei loro apporti alla logica formale ed all'analisi dei fondamenti. Un altro grandissimo matematico che vorrei ricordare è Georg Cantor [1845-1918]; e lo ricordo perché forse anche la grandezza della sua statura intellettuale e quindi la sua autorità scientifica hanno fatto sì che la teoria degli insiemi da lui fondata e sviluppata sia servita come giustificazione della introduzione della cosiddetta "insiemistica" nella nostra scuola.

Il travaglio critico di cui ho parlato finora non ha tuttavia avuto sulla didattica una risonanza paragonabile a quella della corrente del gruppo Bourbaki. E' noto che "Nicolas Bourbaki" è lo pseudonimo di un gruppo di matematici (inizialmente solo francesi) che dal 1939 iniziò a pubblicare scritti ispirati ad una concezione assiomatica ed algebricizzante della matematica [4]. Data la grandissima importanza che il movimento bourbakista ha avuto ed ha ancora sulla matematica di oggi non mi è possibile farne qui una valutazione esauriente; mi limiterò quindi a tentare una analisi della sua influenza sul pensiero psicologico e sulla didattica.

Per quanto riguarda la psicologia ricordo soltanto il caso di Jean Piaget [1896-1980] e della sua scuola; mi pare di poter dire che la psicologia genetica ha preso a prestito dalla ricerca bourbakista sui fondamenti della matematica una certa impostazione di analisi della formazione del pensiero che segue davvicino la costruzione dell'edificio matematico. Infatti si potrebbe dire che tale analisi arriva spesso a correlare i momenti della formazione della strutture mentali con i passi della costruzione del pensiero matematico; per citare soltanto alcuni aspetti, ricorderò la classificazione delle strutture mentali e l'insistenza del riconoscimento degli invarianti nella conoscenza del mondo esterno e dei risultati delle nostre manipolazioni. Non intendo proseguire oltre in questa direzione, ma mi limito ad osservare come l'analisi, che ho cercato di ricordare in modo rudimentale e sommario, abbia esercitato una fondamentale influenza nella stesura dei programmi e nella trattatistica italiana per più di mezzo secolo. Tanto per fare un esempio, vorrei ricordare qui quanta responsabilità abbia avuto questa impostazione logica e psicologica sull'introduzione della cosiddetta "insiemistica" fin dai primi anni del ciclo elementare.

Ho già accennato a questo argomento; qui mi limito ad aggiungere che circa trent'anni fa io mi resi responsabile di uno scritto che fu considerato, per così dire, come un delitto di "lesa maestà insiemistica"; scrissi infatti un articolo in cui esprimevo la mia perplessità a proposito di questi insegnamenti. Il mio scritto fu ovviamente lasciato cadere nel silenzio; ma mi conforta la constatazione che le idee da me allora esposte sono oggi condivise [ovviamente senza citarmi] anche da autorevoli competenti in pedagogia e in didattica. Ricordo anche che l'influenza del pensiero bourbakista provocò anche quel fiorire di pubblicazioni e di corsi di "matematica moderna"; una espressione questa che diede a molti non troppo provveduti l'illusione di poter accostarsi ad una "matematica senza lacrime"; che nel pensiero di molti avrebbe dovuto essere addirittura una "matematica senza fatica", da apprendersi come un gioco. Si sperava forse di aver imboccato la "via regia", la cui esistenza era già stata negata da Euclide, come ho ricordato. Ma gli incauti e gli entusiasti che hanno coltivato speranze di questo tipo hanno dovuto presto ricredersi.

Ora mi pare indubitabile che l'evoluzione del pensiero matematico permetta di sintetizzare molti contenuti che appaiono, a prima vista, distanti tra loro e quindi possa aiutare a costruire certe strutture mentali interiori e quindi porti ad un edificio dottrinale coerente e semplice. A questo proposito mi appare come tipico il caso della geometria proiettiva; la quale, a mio parere, aiuta ad unificare una grande quantità di "fatti" geometrici, ed a chiarire le procedure di soluzione dei problemi. Ma occorrerebbe meditare assiduamente sulle strategie didattiche atte a sfruttare questi progressi; perché ritengo che sia forte la tentazione di ricalcare l'opera didattica su quella che ci si presenta come una gerarchia logica irrefragabile, credendo che la strada seguita dalla nostra mente nella costruzione interiore delle strutture concettuali sia cronologicamente analoga a quella gerarchia concettuale che è stata raggiunta dalla critica secolare.

4 - La scuola italiana negli anni venti

Qualche anno fa (1995), fui invitato a parlare a Roma, in occasione della celebrazione del centenario di fondazione della società nazionale Mathesis. Trattando della matematica nel primo dopoguerra [precisamente nel dopoguerra della prima guerra mondiale], fui portato necessariamente a parlare della riforma della scuola che all'epoca prese il nome dal filosofo Giovanni Gentile. Ricordai che al Gentile si deve la istituzione dell'istituto che fu chiamato "Liceo scientifico"; ed il nome "liceo", come si legge negli scritti del Gentile stesso, fu dato a quella scuola proprio per sottolineare che la scienza doveva ivi essere insegnata “secondo i propri principi"; quindi, vorrei dire, con una presentazione che mirasse a fare acquisire il possesso dei principi, lasciando poi all'Università l'addestramento tecnico e l'approfondimento specialistico. Con la riforma Gentile entravano nei programmi del liceo anche gli elementi di geometria analitica. E ciò potrebbe essere giudicato come un fatto molto importante, quando si guardi al complesso dei metodi tradizionalmente così indicati come al primo passo per utilizzare il linguaggio matematico nella conoscenza di una realtà data; e soprattutto qualora si guardi ai metodi cartesiani come ad una realizzazione particolare di quelle procedure di analisi e di sintesi che si incontrano già codificate in Euclide ed in Proclo. E' facile osservare che l'insegnamento della geometria analitica si presti molto bene ad esercitare gli allievi a quell'opera di "cifrare e decifrare", ovvero, se si vuole, a quell'opera di codificazione e di interpretazione che è fondamentale per chi vuole conoscere la realtà con gli strumenti della matematica ed insieme allenarsi a dominare criticamente questi strumenti. Infatti, nel caso della geometria, i contenuti della codificazione matematica sono già noti, almeno in parte; tuttavia il linguaggio dell'algebra deve essere interpretato, nelle sue possibilità e nella sua estensione. E ciò avviene attraverso l'operazione che viene chiamata "discussione", la quale realizza concretamente quel momento di "sintesi" che gli autori classici [citati poco sopra] hanno presentato come essenziale nel chiudere, per così dire, il cerchio della conoscenza certa e rigorosamente scientifica della realtà che si studia. In altre parole, vorrei ripetere che, in questo ordine di idee, sono portato a pensare che la geometria analitica possa essere considerata come un buon paradigma di teoria fisico-matematica. Cioè come un esempio di applicazione del linguaggio matematico ad una realtà che è, o si presume, già concettualmente strutturata. In questo caso il linguaggio matematico viene utilizzato per rappresentare gli enti della geometria ed anche per dedurre, e per risolvere problemi. Ma, come è noto, tale linguaggio non ha la medesima estensione e le medesime possibilità del linguaggio naturale, abitualmente utilizzato nella geometria tradizionale [o comunque presente nella formulazione dei problemi]. Ne consegue che la deduzione, affidata al calcolo algebrico, deve poi essere accompagnata da una momento di valutazione o discussione, che realizza qui concretamente il momento della "sintesi", già codificato dai geometri e dai filosofi greci.

Insieme all'ampliamento dei contenuti dei programmi la riforma Gentile istituiva anche lo scritto di matematica per la maturità scientifica; e potrebbe forse iniziare a questo punto una pacata riflessione sui risultati e sulle conseguenze di questa introduzione. Infatti si è verificato storicamente un fenomeno di fissazione e quasi di clonazione degli argomenti e dei temi di questa prova scritta; temi che, da un anno all'altro, divennero quasi fotocopie gli uni degli altri. Di conseguenza questa uniformità finì per dirigere ed ispirare la didattica e la manualistica, le quali praticamente vennero dominate da quelli che erano chiamati i "metodi per la discussione dei problemi di secondo grado". Appare chiaro che il campo di scelta per argomenti di scritti di matematica alla maturità era abbastanza ristretto; inoltre ho già detto quanto grande possa essere, a mio parere, il valore formativo della geometria analitica, guardata come un paradigma di conoscenza della realtà con gli strumenti della matematica. E soprattutto ho cercato di mettere in luce quanto il momento della discussione, nella soluzione dei problemi, possa formare gli allievi all'esercizio delle critica e della propria capacità raziocinante. Ma nella pratica didattica, purtroppo, è avvenuto che la discussione è stata codificata nella forma di un "metodo", cioè in una procedura che pian piano ha assunto certi aspetti di automaticità algoritmica che la rendevano applicabile anche da chi non comprendesse molto bene il significato e le motivazioni delle operazioni eseguite. Inoltre la preparazione all'impiego di questi metodi ha assunto col tempo una importanza sempre maggiore nella didattica, in modo tale da mascherare l'esistenza e anche la portata di altri capitoli, [pure importanti] della matematica. Ma soprattutto in modo da radicare in molte intelligenza una immagine della matematica che non rende giustizia a questa dottrina. E purtroppo vorrei dire che tale immagine della matematica è forse ancora oggi diffusa tra molti, anche laureati in materie tipicamente scientifiche.

5 - Addestramento ed insegnamento

Ho utilizzato poco fa l'espressione "linguaggio matematico"; e vorrei ritornare qui sul concetto per riflettere su alcuni caratteri della matematica [soprattutto quella che oggi insegniamo] che le conferiscono il carattere di linguaggio; per esempio il fatto che la matematica ci fornisce gli strumenti concettuali e simbolici per rappresentare una certa realtà, per formulare certe relazioni tra gli oggetti della nostra conoscenza, e per trarre rigorosamente le conseguenze da certe premesse. Infatti la realtà esterna a noi viene rappresentata e codificata con i numeri, tramite l'operazione di misura. Di conseguenza le relazioni tra gli oggetti vengono espresse con relazioni tra i loro simboli, le deduzioni da certe ipotesi vengono rappresentate con operazioni sui numeri. In questo senso ho detto poco fa che l'insieme dei metodi e delle convenzioni che viene oggi chiamato "geometria analitica" rappresenta il paradigma della applicazione del linguaggio matematico alla conoscenza di una realtà a noi esterna; realtà che in questo caso è costituita dagli oggetti idealizzati della geometria. L'aspetto della matematica considerata come un linguaggio pone alcuni problemi di apprendimento e di didattica sui quali vorrei riflettere. Tali problemi nascono dalle caratteristiche del linguaggio matematico, che vorrei qui ricordare.

Anzitutto osservo che il simbolismo adottato dalla nostra matematica è sostanzialmente astratto e convenzionale; di conseguenza esso non ha alcun margine di ridondanza; la quale invece costituisce un carattere tipico dei linguaggi naturali. Ne consegue che quando in una formula matematica manca anche un solo simbolo, o uno dei simboli è errato, oppure non sono rispettate le regole che definiscono le "formule ben formate" [cioè le espressioni ammesse come dotate di senso nel linguaggio], l'insieme dei simboli non trasmette al lettore alcuna informazione, o trasmette un'informazione errata.

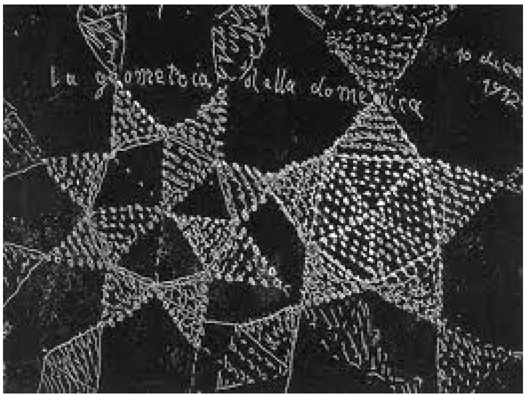
In secondo luogo la sintassi dei simboli ha regole rigidissime e perentorie. Ne consegue che ogni trasformazione di simboli [calcolo] che non rispetta anche una sola regola della sintassi non conduce ad alcuna conclusione, oppure conduce a conclusioni errate. In compenso tuttavia ogni trasformazione di simboli che viene fatta con rispetto delle regole della sintassi presenta le caratteristiche di certezza, ripetibilità e quasi, per così dire, automaticità che ci permettono di affidare spesso i calcoli a strumenti materiali [macchine o circuiti elettrici]. Queste caratteristiche del linguaggio matematico spiegano, almeno in parte, il successo secolare della scienza fisico-matematica della natura. Ma esse pongono, come ho detto, dei problemi didattici: infatti ogni linguaggio richiede esercizio per essere utilizzato proficuamente; e nel caso del linguaggio matematico, la sua convenzionalità e la rigidezza assoluta della sua sintassi richiedono un esercizio forse più impegnativo di quello richiesto dall'apprendimento di una lingua naturale. Questo esercizio è imposto dalla nostra società fino dai primi gradi della scolarità giovanile: perché ancora oggi noi costringiamo i ragazzi delle elementari a memorizzare le regole del calcolo aritmetico fondamentale, ed a memorizzare i risultati di certe operazioni elementari [la "Tavola pitagorica", come si diceva ai miei tempi, oppure "le tabelline" come si dice oggi]. Si tratta di un addestramento che è quasi necessario, se il soggetto vuole adoperare il linguaggio matematico con una certa scioltezza. E questa fatica, - ripeto - deve essere fatta da chiunque voglia utilizzare proficuamente una lingua qualsiasi, e quindi anche il linguaggio matematico. Ma la necessità di questo addestramento costituisce spesso una tentazione per gli insegnanti, i quali potrebbero cedere alla tentazione di restringere l'orizzonte del loro insegnamento a questo lavoro di addestramento. Di conseguenza si incontrano vari pericoli: anzitutto -ripeto- quello di radicare negli allievi una immagine distorta della matematica; ed in secondo luogo quello di generare dei complessi di disgusto ed anche addirittura di rifiuto della matematica in certi soggetti. Si può giungere fino a classificare come "ritardati" o "in difficoltà" certi soggetti, oppure anche si può giungere a bloccare il loro sviluppo intellettuale globale. Ciò che dico è frutto anche di esperienza personale; infatti ho avuto occasione di osservare vari episodi, abbastanza caratteristici, di rifiuto della matematica; rifiuto che, a mio parere, era generato spesso da un eccesso di esercizi di carattere puramente addestrativo, oppure dalla presunzione, da parte dell'insegnante, di dettare il percorso di apprendimento secondo una certa linea che, pur avendo una sua validità, era ritenuta come unica ed esclusiva da parte di un operatore didattico forse non troppo agile ed aperto.

Un atteggiamento cosiffatto viene spesso assunto a livello elementare: "Se non impari le tabelline non possiamo andare avanti; e non andremo avanti finché non avrai imparato a memoria le tabelline." Come ho già detto, un tale atteggiamento ottiene spesso un risultato opposto a quello che si desidera; e conduce addirittura a blocchi o a rifiuti dell'intera dottrina. O comunque distorce l'immagine della matematica, allontanando dal suo studio molte menti che potrebbero invece averne giovamento. Si potrebbe dire che comportamenti didattici come questi si fondano spesso sulla presunzione di chi pretende di conoscere a fondo tutte le procedure del nostro cervello, e pretende di far percorrere a tutti lo stesso cammino, che si considera come l'unico possibile. Ma purtroppo mi vien fatto di pensare che la matematica insegnata in questo modo realizza proprio quella "matematica da schiavi" che ho ricordato, citando Freudenthal; e forse anche rivela, anche contro l'intento dell'insegnante, un giudizio sostanzialmente negativo sulla personalità dell'allievo, inteso come creatura umana.

Mi pare di poter dire che esiste anche un altro pericolo, che si potrebbe dire duale del precedente: cioè il pericolo di giudicare come portati per la matematica dei soggetti che sanno apprendere rapidamente le regole della sintassi, e giungono a cavarsela anche in calcoli algebrici complicati e in espressioni intricate; ma posseggono in minor misura la capacità di astrazione, la inventiva ed il gusto della ricerca che formano un bagaglio utile per chi voglia usare la matematica in modo non puramente passivo.

6 - Simboli e significati

Ho parlato poco fa dell'influenza esercitata sulla didattica dal movimento bourbakista; influenza confortata e, per così dire, convalidata dal prestigio scientifico altissimo dei costituenti del gruppo Bourbaki e dal prestigio della scuola psicologica di Jean Piaget. L'obbiettiva autorevolezza scientifica di questi grandi ricercatori è tuttavia stata occasione di applicazioni forse affrettate ed un poco superficiali del loro pensiero. La conseguenza è stata che per decenni la scuola italiana ha vissuto cercando di realizzare in matematica ciò che appare come un equivoco didattico fondato su un equivoco psicologico: questo potrebbe essere descritto dicendo che ciò che appare come concettualmente più semplice ed elementare deve per forza essere ciò che si impara meglio e prima di tutto. Di conseguenza si è decretato che il concetto di insieme è il più semplice ed è il fondamento per ogni costruzione teorica coerente; quindi si incominci con il concetto di insieme per costruire l'aritmetica e la matematica in generale. Si sono così costruite delle gabbie concettuali vastissime e generalissime, atte addirittura a contenere tutto lo scibile. La lezione della storia non è stata ascoltata: anzi da parte di certi frettolosi entusiasti è stata addirittura decretata e sancita solennemente la morte della geometria. Invece la storia insegna che la geometria euclidea si è sviluppata per prima, nonostante il fatto che concettualmente essa si presenti, per così dire, come "complicata", perché riguarda nozioni che nascono da ambiti sensoriali molto diversi tra loro. Ma essa è comparsa sulla scena della storia molto prima della geometria proiettiva e della geometria affine. Ciò, secondo Freudenthal, è dovuto al fatto che la geometria euclidea nasce da quello che egli qualifica come "un contesto ricco"; mentre la pretesa di incominciare da quelli che soltanto l'analisi logica presenta come elementi primi e fondamentali, conduce ovviamente a costruire delle gabbie concettuali che sono - ripeto - vastissime ma vuote. Nello schema didattico abituale, oggi tali edifici concettuali vengono spesso presentati fin dall'inizio nella massima generalità consentita dalla presunta comprensione degli allievi, e soltanto in seguito vengono presentati degli esempi pratici di applicazione delle teorie astratte presentate.



Leonardo Sinisgalli

Ma è stato osservato acutamente [da Freudenthal] che, con queste procedure didattiche, gli esempi pratici che si portano nelle esercitazioni servono, per così dire, da riempitivi di una gabbia concettuale che è vuota nella sua in origine, e che è destinata a rimanere vuota in gran parte. Di tutt'altra natura è invece l'esempio "paradigmatico": quello che stimola l'ascoltatore a costruire una struttura concettuale.

A questo proposito si può osservare che quasi sempre noi apprendiamo i giochi proprio con una tecnica di presentazione di esempi paradigmatici: ben pochi infatti diventerebbero validi giocatori di un qualunque gioco per esempio di carte se si limitassero a memorizzarne le regole. Invece è con l'esempio paradigmatico che si può sperare di diminuire il pericolo grave di distacco dal simbolo dal suo significato, che è la grande piaga della didattica della matematica [soprattutto superiore] come ha ripetutamente osservato il compianto amico e collega Giovanni Melzi. Invero con questo distacco la matematica tende a perdere il suo carattere di linguaggio, che nasce e si sviluppa per "dire" delle cose rigorosamente vere di una realtà diversa dal linguaggio stesso; ma se il simbolo perde il contatto con un suo contenuto [o almeno un contenuto possibile] lo studio di una dottrina per natura sua astratta come la matematica rischia di diventare un puro gioco immotivato ed astratto di scritture e di regole, che molto spesso stanca e disgusta.

7 - Problemi concreti

Ciò che ho detto finora pone dei problemi didattici che sono molto impegnativi e spesso di non facile soluzione. Le difficoltà da affrontare e superare sono ovviamente diverse, dipendentemente dai 8 diversi gradi di scuola e dalla diversa maturazione degli allievi. Per limitarmi alla problematica dell'insegnamento universitario, mi rendo ben conto del fatto che siamo spesso costretti, dalla struttura complessiva dei corsi, a seguire proprio una strada che conduce alla costruzione di vasti castelli teorici e vuoti, prima di poterli riempire con dei contenuti, per dominare i quali le teorie sono state costruite: così accade per esempio nelle scuole di ingegneria, nelle quali gli studenti debbono studiare per almeno un biennio l'analisi matematica, ed altre materie astratte, come strumenti necessari per il seguito del corso di studi. E soltanto nel seguito si trovano a dover applicare le nozioni teoriche apprese un biennio prima e di solito [ahimé] dimenticate, e quindi generalmente giudicate come inutili, o almeno scarsamente utili. Ma il fenomeno è osservabile in ogni facoltà universitaria, anche se sotto aspetti diversi da un caso all'altro. Penso per esempio ai corsi di algebra, impartiti nei primi anni dei corsi di laurea in matematica che presentano spesso la dottrina sotto un aspetto astrattissimo; aspetto che gli studenti non sono preparati ad assimilare; di conseguenza la preparazione agli esami diventa un esercizio vano di memoria di nomi strani, e di oggetti mentali la cui esistenza è poco giustificata da ciò che appartiene all'universo mentale degli utenti. Si potrebbe dire quindi che, a livello universitario, acquistano particolare peso certe difficoltà dell' insegnamento e dell'apprendimento che si incontrano in tutti i livelli di studio: infatti nell'università il sapere viene necessariamente trasmesso in forma estremamente specializzata; necessariamente dico, perché i progressi della ricerca scientifica obbligano ad una informazione sempre più profonda e minuta. Ma gli studenti non sono sempre stati preparati alla sintesi e quindi spesso si rivelano incapaci di operare quella appropriazione che è condizione necessaria perché l'informazione diventi cultura, cioè sapere organico, posseduto ed operante. Di conseguenza si verificano le lamentele e le proteste di una classe studentesca immatura e spesso anche pigra, che ingorga le università in cerca di una promozione sociale che la nostra società attribuisce al titolo di studio, ormai inflazionato oltre ogni limite. Le accuse sono ovviamente di eccessiva astrazione e teoricità delle nozioni. E dopo la fine del curriculum di studi l'impatto con la vita professionale rende evidenti le mancanze di formazione e di preparazione all' esercizio di quella che ho richiamato con il termine di "ars". Occorrerebbe invece fare in modo che l'apprendimento diventi quella "reinvenzione guidata" che consente la appropriazione delle idee e dei metodi in modo attivo e creativo. Ma ovviamente, se si vuole che l'apprendimento diventi "reinvenzione guidata" occorre che la cultura degli insegnanti sia profonda e sicura. Infatti soltanto così l'insegnante può risparmiare agli allievi le vie senza sbocco, i circoli viziosi, le fatiche inutili; ma quest'opera può essere svolta soltanto da chi può vedere lontano, perché domina tutto il panorama della materia da insegnare.

[1] Howard Gardner. The frames of mind. Tradotto in italiano con il titolo "Formae mentis". Saggio sulla pluralità dell'intelligenza. Milano [Feltrinelli],1994; 45pp.

[2] Hans Freundenthal. Revisiting mathematical Education [China Lectures]. Tradotto in italiano col titolo: "Ripensando l' educazione matematica" da Carlo Felice Manara. Brescia (La scuola), 1994.

[3]" Per insegnare matematica alle elementari basta sapere quella delle elementari. Chi ha fatto la III media ne ha 3 anni di troppo. Nel programma delle magistrali si può dunque abolire. Non è vero che occorra la laurea per insegnare matematica alle medie: è una bugia inventata dalla casta che ha i figli laureati. Ha messo la zampa su 204778 posti di lavoro un po' speciali. E' la cattedra dove si lavora meno (16 ore settimanali). E' quella in cui non occorre aggiornarsi. Basta ripetere le stesse cretinate che sa ogni bravo ragazzino di III media. La correzione dei compiti si fa in un quarto d'ora. Quelli che non sono giusti sono sbagliati...” (Scuola di Barbiana. Lettera ad una professoressa).

[4] Ricordo che nel secolo scorso esisté in Francia un personaggio, abbastanza noto, che si chiamava Charles Bourbaki [1816-1897]; egli servì nelle forze armate dell'imperatore Napoleone III. Nella guerra franco prussiana, che si concluse con la disastrosa sconfitta dei francesi a Sédan, Bourbaki comandava una armata, che egli salvò dalla prigionia sconfinando in Svizzera. Forse il suo cognome fu assunto come pseudonimo dal gruppo di matematici giovani [a quel tempo] perché ha un suono che può apparire strano ad un orecchio francese.

En vain j'ai voulu de l'espace

Trouver la fin et le milieu.

Sous je ne sais quel oeil de feu

Je sens mon aile qui se casse.

[Charles Baudelaire. Les plaintes d'un Icare (Les fleurs du mal)]

Mathesis di Mantova, marzo 1998